

Una metodología para realizar Diferenciación Automática Anidada

Juan Luis Valerdi
Fernando Raul Rodriguez

Resumen

En este trabajo se presenta una propuesta para realizar Diferenciación Automática Anidada utilizando cualquier biblioteca de Diferenciación Automática que permita sobrecarga de operadores. Para calcular las derivadas anidadas en una misma evaluación de la función, la cual se asume que sea analítica, se trabaja con el modo forward utilizando una nueva estructura llamada SuperAdouble, que garantiza que se aplique correctamente la Diferenciación Automática y se calculen el valor y la derivada que se requiera.

This paper proposes a framework to apply Nested Automatic Differentiation using any library of Automatic Differentiation which allows operator overloading. To compute nested derivatives of a function while it is being evaluated, which is assumed to be analytic, a new structure called SuperAdouble is used in the forward mode. This new class guarantees the correct application of Automatic Differentiation to calculate the value and derivative of a function where is required.

1. Introducción

Muchas veces es necesario calcular el valor numérico de una función y la vez obtener una aproximación precisa de las derivadas. Ejemplos de esto se pueden encontrar en los métodos numéricos de la programación no lineal [1], en los métodos implícitos para la resolución numérica de ecuaciones diferenciales [2] y en problemas inversos en la asimilación de datos [3].

La Diferenciación Automática (AD, por sus siglas en inglés) es una herramienta que puede usarse para calcular las derivadas de cualquier función diferenciable, de forma automática. En este contexto, “automática” significa que el usuario solo necesita escribir el código fuente de la función en un lenguaje determinado, y la herramienta puede calcular las derivadas solicitadas sin incurrir en errores de truncamiento [3].

Existen herramientas de Diferenciación Automática para varios lenguajes de programación, como ADOL-C [4] para programas escritos en C y C++, ADIFOR [5] para programas escritos en Fortran, y ADOLNET [6] para lenguajes de la plataforma .NET.

Una forma de crear estas herramientas de AD en lenguajes que soporten sobrecarga de operadores es crear una clase llamada Adouble que contenga dos campos de tipo double, uno llamado valor y otro derivada. Para esta clase se sobrecargan los operadores aritméticos y las funciones elementales, para que, al mismo tiempo que se calculen los resultados de las operaciones, se calculen el valor de las derivadas de esas operaciones [3].

Sin embargo, existen ocasiones en las que es necesario calcular unas derivadas como paso intermedio para el cálculo de otras y con las técnicas usuales de AD esto no es posible. Un ejemplo sencillo donde se aprecia este fenómeno es el siguiente.

Ejemplo 1. Sea f la función definida como

$$f(x) = x^2 + \dot{g}(x^3),$$

donde \dot{g} es la función derivada de $g(x) = e^{x^2}$. Suponiendo que sólo se conoce el código fuente de g y de f , se desea calcular el valor y la derivada de f en el punto $x = x_0$.

Estas derivadas que intervienen en el cálculo de otras reciben el nombre de derivadas anidadas, y aunque existen herramientas de Diferenciación Automática como ADOL-C [7] que permiten el cálculo de estas derivadas, no existe un método general que funcione en todas las herramientas existentes [8], por lo que puede decirse que no existe una solución general para este problema.

En este trabajo se propone una metodología y una herramienta computacional para calcular derivadas anidadas de funciones analíticas utilizando cualquier biblioteca de AD que soporte sobrecarga de operadores.

La metodología propuesta en este trabajo parte de la creación de un nuevo tipo de dato que se llamará SuperAdouble. Al igual que el tipo de dato Adouble contendrá dos campos, uno para almacenar el valor y otro para almacenar la derivada. A diferencia de los Adoubles, en el que los campos valor y derivada son de tipo double, en los SuperAdoubles, estos campos serán de tipo Adouble. Para esta nueva clase también se sobrecargan los operadores aritméticos y las funciones elementales para calcular simultáneamente el valor de las operaciones y sus derivadas. Al realizar operaciones con estos SuperAdoubles es posible calcular derivadas anidadas.

La fundamentación teórica de los Adoubles y SuperAdoubles se encuentra en [11], donde se realiza una presentación algebraica del espacio de los números Adoubles (que son el fundamento de la Diferenciación Automática) y de los números SuperAdoubles (que son el fundamento de este trabajo). También se encuentra en [11] una demostración de la posibilidad de calcular derivadas anidadas usando los SuperAdoubles.

Este trabajo se divide en dos secciones: la Sección 2 introduce los conocimientos necesarios para entender e implementar la Diferenciación Automática y el modo forward; la Sección 3 muestra la metodología que se propone para calcular derivadas anidadas, la clase SuperAdouble y su implementación.

2. Diferenciación Automática

En esta sección se realiza una introducción a la diferenciación automática, en la que se presentarán sus modos de aplicación, ejemplos y vías de implementación. Para la implementación se mostrarán códigos en el lenguaje de programación C# con el objetivo de mostrar el uso de la AD en los ejemplos que se presentan.

2.1. Introducción a la AD

La Diferenciación Automática, también conocida como diferenciación algorítmica, es un conjunto de técnicas y herramientas que permiten evaluar numéricamente la derivada de una función definida mediante su código fuente en un lenguaje de programación.

La AD está basada en el hecho de que para evaluar una función en un lenguaje de programación dado se ejecutan una secuencia de operaciones aritméticas (adición, sustracción, multiplicación y división) y llamados a funciones elementales (exp, log, sen, cos, etc.). Aplicando la regla de la cadena al mismo tiempo que se realizan estas operaciones, se pueden calcular derivadas de cualquier orden tan exactas como la aritmética de la máquina lo permita [3].

La base de la AD es la descomposición de diferenciales que provee la regla de la cadena. Para una composición de funciones $f(x) = g(h(x))$ se obtiene, a partir de la regla de la cadena,

$$\frac{df}{dx} = \frac{dg}{dh} \frac{dh}{dx}.$$

Existen dos modos para aplicar la AD, el modo hacia adelante o modo forward y el modo hacia atrás o modo reverse. El modo forward se obtiene al aplicar la regla de la cadena de derecha a izquierda, es decir, primero se calcula dh/dx y después dg/dh , mientras que el modo reverse se obtiene cuando se aplica la regla de la cadena de izquierda a derecha [3].

A continuación se presentan las ideas fundamentales del modo hacia adelante, que por ser más sencillo e intuitivo, permite explicar con mayor claridad el funcionamiento de la diferenciación automática. El lector interesado en el modo hacia atrás puede consultar [3].

2.1.1. Modo forward

Los siguientes ejemplos ilustran el funcionamiento del modo forward:

Ejemplo 2. *Se desea calcular el valor y la derivada de*

$$f(x) = x^2 \cdot \cos(x)$$

en el punto $x = \pi$.

La siguiente tabla contiene las operaciones necesarias para evaluar esta función en una computadora.

w_1	=	x	=	π
w_2	=	w_1^2	=	π^2
w_3	=	$\cos(w_1)$	=	-1
w_4	=	$w_2 w_3$	=	$-\pi^2$
y	=	w_4	=	$-\pi^2$

Para aplicar el modo hacia adelante, se almacena en una nueva variable la derivada de cada operación con respecto a la variable x . Esta derivada se puede calcular al mismo tiempo que se realiza la operación. La siguiente tabla ilustra este procedimiento.

w_1	=	x	=	π	\dot{w}_1	=	\dot{x}	=	1
w_2	=	w_1^2	=	π^2	\dot{w}_2	=	$2w_1 \dot{w}_1$	=	2π
w_3	=	$\cos(w_1)$	=	-1	\dot{w}_3	=	$\sin(w_1) \dot{w}_1$	=	0
w_4	=	$w_2 w_3$	=	$-\pi^2$	\dot{w}_4	=	$w_2 \dot{w}_3 + \dot{w}_2 w_3$	=	-2π
y	=	w_4	=	$-\pi^2$	\dot{y}	=	\dot{w}_4	=	-2π

En la tabla anterior, las variables \dot{w}_i almacenan la derivada con respecto a x de la operación w_i . Como se desea calcular la derivada con respecto a la variable x , entonces la nueva variable $\dot{w}_1 = \frac{dw_1}{dx}$ se inicializa con el valor 1. Al finalizar el cálculo, en la variable \dot{w}_4 se tiene el valor de la derivada de $f(x)$ con respecto a x .

El siguiente ejemplo muestra cómo se puede aplicar el modo hacia adelante para calcular derivadas parciales de funciones de más de una variable.

Ejemplo 3. Se desea calcular el valor y el gradiente de

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2 + \text{sen}(x_1)$$

en $x_1 = \pi$ y $x_2 = 2$.

La función f de este ejemplo puede expresarse mediante las siguientes operaciones.

w_1	=	x_1	=	π
w_2	=	x_2	=	2
w_3	=	$w_1 w_2$	=	2π
w_4	=	$\text{sen}(w_1)$	=	0
w_5	=	$w_3 + w_4$	=	2π
y	=	w_5	=	2π

Para calcular el gradiente utilizando el modo forward hay que realizar el mismo procedimiento del ejemplo anterior, pero en este caso dos veces: una por cada derivada parcial. A continuación se muestra el cálculo de la derivada parcial $\frac{df}{dx_1}$.

w_1	=	x_1	=	π	\dot{w}_1	=	\dot{x}_1	=	1
w_2	=	x_2	=	2	\dot{w}_2	=	\dot{x}_2	=	0
w_3	=	$w_1 w_2$	=	2π	\dot{w}_3	=	$\dot{w}_1 w_2 + w_1 \dot{w}_2$	=	2
w_4	=	$\text{sen}(w_1)$	=	0	\dot{w}_4	=	$\cos(w_1) \dot{w}_1$	=	-1
w_5	=	$w_3 + w_4$	=	2π	\dot{w}_5	=	$\dot{w}_3 + \dot{w}_4$	=	1
y	=	w_5	=	2π	\dot{y}	=	\dot{w}_5	=	1

En este caso, la variable \dot{w}_2 se inicializa con valor 0 porque $\frac{\partial x_2}{\partial x_1} = 0$, $w_2 = x_2$ y $\dot{w}_2 = \frac{\partial w_2}{\partial x_1}$. Al finalizar los cálculos, en la variable \dot{w}_5 se tiene el valor de la derivada $\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}$.

El procedimiento presentado en los ejemplos anteriores se puede generalizar de la siguiente forma.

Sea $f : R^n \rightarrow R^m$ una función diferenciable. Se denotarán las n variables reales de entrada como

$$w_{i-n} = x_i \quad \text{y} \quad \dot{w}_{i-n} = \dot{x}_i, \quad \text{con } i = 1 \dots n \quad \text{y} \quad \dot{x}_i = 1.$$

Las variables \dot{x}_i se inicializan con el valor de las derivadas parciales de cada variable x_i con respecto a la variable original. Si se desea calcular la derivada parcial de f respecto a x_i , entonces \dot{x}_i debería ser 1 y \dot{x}_j debería ser 0 para toda j diferente de i .

Como f está compuesta por funciones elementales, es conveniente denotarlas de alguna forma. A la j -ésima función elemental se le denotará por ϕ_j .

Para descomponer a f en operaciones elementales se denotarán nuevas variables w_i y \dot{w}_i como

$$w_i = \phi_i(w_j) \quad \text{con } j \prec i, \tag{1}$$

$$\dot{w}_i = \sum_{j \prec i} \frac{\partial}{\partial w_j} \phi_i(w_j) \dot{w}_j,$$

donde en este caso $i = 1 \dots l$ y l es el número de operaciones elementales que componen a f . La simbología $\phi_i(w_j)$ con $j \prec i$ significa que ϕ_i depende directamente de w_j , es decir, que para evaluar ϕ_i se usa explícitamente w_j . También es usual denotar (1) como

$$w_i = \phi_i(w_j)_{j \prec i}.$$

Con las notaciones anteriores se puede expresar el procedimiento general de la siguiente forma:

$w_i = x_i$	$i = 1 \dots n$
$\dot{w}_{i-n} = \dot{x}_i$	
$w_i = \phi_i(w_j)_{j \prec i}$	$i = 1 \dots l$
$\dot{w}_i = \sum_{j \prec i} \frac{\partial}{\partial w_j} \phi_i(w_j) \dot{w}_j$	
$y_{m-i} = w_{l-i}$	$i = m - 1 \dots 0$
$\dot{y}_{m-i} = \dot{w}_{l-i}$	

Como se puede apreciar en la tabla anterior, el procedimiento general del modo forward está estructurado en tres fases: primero se inicializan las variables, después se ejecutan las operaciones y se calculan las derivadas, y finalmente se devuelven los valores y la derivada calculada.

En esta sección se ha presentado la AD desde un punto de vista teórico. En la siguiente sección se muestra una posible vía para implementar estas ideas computacionalmente.

2.2. Implementación

Existen dos estrategias para lograr AD: transformación del código fuente y sobrecarga de operadores [3].

Para utilizar la metodología propuesta en este trabajo resulta más conveniente utilizar la sobrecarga de operadores, por lo que en esta sección se presentan sus elementos fundamentales. El lector interesado en la transformación de código puede consultar [9].

Para implementar la AD utilizando sobrecarga de operadores se debe crear una nueva clase, la cual se llamará en este trabajo Adouble siguiendo la notación de [3].

En esta clase se deben definir dos campos de números reales, uno, que usualmente recibe el nombre de valor, para almacenar el resultado de la operación que este Adouble representa, y otro, que usualmente recibe el nombre de derivada, para almacenar la derivada de esa operación. Estos campos valor y derivada son la representación computacional de las variables w_i y \dot{w}_i .

Una vez definida esta nueva clase, se sobrecargan los operadores aritméticos y las funciones elementales, para que, al mismo tiempo que se calculan los resultados de las operaciones, también se pueda calcular el valor de las derivadas.

La siguiente tabla muestra los valores de los campos valor y derivada de cada uno de los Adoubles que intervienen en la evaluación de la función $f(x) = x^2 \cdot \cos(x)$. Nótese que cuando se realizan todas las operaciones, en el campo derivada del Adouble y se obtiene el valor de la derivada de la función en el punto en que fue evaluada.

Adouble w_1	$w_1.\text{valor} = \pi$	$w_1.\text{derivada} = 1$
Adouble $w_2 = w_1^2$	$w_2.\text{valor} = \pi^2$	$w_2.\text{derivada} = 2\pi$
Adouble $w_3 = \cos(w_1)$	$w_3.\text{valor} = -1$	$w_3.\text{derivada} = 0$
Adouble $w_4 = w_2 * w_3$	$w_4.\text{valor} = -\pi^2$	$w_4.\text{derivada} = -2\pi$
Adouble $y = w_4$	$y.\text{valor} = -\pi^2$	$y.\text{derivada} = -2\pi$

Esta vía tiene la ventaja de que es fácil de implementar y que para utilizarlo solo hay que modificar ligeramente el código fuente de la función que se desea derivar [9].

En la Figura 1 se muestra la implementación de un programa en C# que calcula el valor de $f(x) = x^2 \cdot \cos(x)$ en $x = 2$; y en la Figura 2 las modificaciones necesarias para calcular la derivada en ese punto.

```
class Example
{
    static void Main()
    {
        double x = 2; //Inicialización de x
                       //para evaluar f en 2
        double y = x*x + cos(x); //Cálculo de f
        Console.WriteLine("El valor de f en x = 2 es: " + y);
    }
}
```

Figura 1: Código de $f(x) = x^2 \cdot \cos(x)$

Esta idea se puede modificar fácilmente para calcular derivadas parciales de funciones de más de una variable. El lector interesado en este tema puede consultar [3] y [4].

3. Cálculo de Derivadas Anidadas

En esta sección se presenta una metodología para calcular derivadas anidadas utilizando cualquier biblioteca de Diferenciación Automática mediante sobrecarga de operadores. Esta metodología se presenta para funciones de una variable real para a facilitar su exposición, pero su extensión a funciones de varias variables es posible de la misma forma que las técnicas de diferenciación automática se extienden a funciones varias variables [3].

La metodología que se propone es la siguiente:

1. Partir de una biblioteca de Diferenciación Automática en la que exista un tipo de dato Adouble.
2. Definir un nuevo tipo de dato llamado SuperAdouble. Esta nueva estructura tendrá dos campos: valor y derivada, y ambos campos serán del tipo de dato Adouble definido en la biblioteca del paso 1. El hecho de que estos campos sean de tipo Adouble permitirá calcular las derivadas anidadas.

```

class Example
{
    static void Main()
    {
        Adouble x = new Adouble(); \\Inicialización de x como
                                   \\Adouble
        x.valor = 2; \\ Se quiere el valor y la derivada
                    \\ en x = 2
        x.derivada = 1; \\La derivada de x con respecto a x es 1
        Adouble y = x*x + cos(x);
        Console.WriteLine("El valor de f en x = 2 es: " + w4.valor);
        Console.WriteLine("La derivada de f en x = 2 es: " + w4.derivada);
    }
}

```

Figura 2: Código modificado de $f(x) = x^2 \cdot \cos(x)$

3. Definir funciones para construir SuperAdoubles a partir de Adoubles y para obtener los campos valor y derivada de variable de tipo SuperAdouble. Estas funciones se presentan en la Sección 3.2.
4. Modificar el código fuente de la función anidada para calcular las derivadas anidadas.

En las siguientes secciones se detallan cada uno estos pasos.

3.1. La clase SuperAdouble

El segundo paso propone crear una nueva clase llamada SuperAdouble. Este nuevo tipo de dato tiene un campo valor y un campo derivada, ambos de tipo Adouble. Al igual que la clase Adouble, los operadores aritméticos y las funciones elementales se sobrecargan para que cuando operen con valores de este tipo permitan calcular los valores y las derivadas anidadas que se deseen.

El campo valor de los SuperAdouble es de tipo Adouble, por lo que este contiene a un campo valor y un campo derivada, ambos de tipo double. Es decir, para una variable de tipo SuperAdouble tiene sentido hablar de los campos valor.valor y valor.derivada. Por el mismo motivo, en una variable de tipo SuperAdouble existen los campos derivada.valor y derivada.derivada.

Estos cuatro campos: valor.valor, valor.derivada, derivada.valor y derivada.derivada se relacionan con las derivadas anidadas a través del siguiente resultado, que es el principal aporte de este trabajo.

Teorema 1. *En un objeto de tipo SuperAdouble se cumple que:*

- *valor.valor es el valor de la función anidada.*
- *valor.derivada es la derivada original.*

- *derivada.valor* contiene la derivada anidada.
- *derivada.derivada* contiene la derivada compuesta.

Demostración. La demostración se encuentra en [11]. □

Una vez que esté definida esta nueva clase, es necesario definir funciones para crear instancias de esta clase y obtener las derivadas y valores deseados. Estas funciones se muestran en la siguiente sección.

3.2. Relación entre Adoubles y SuperAdoubles.

Para calcular derivadas anidadas son necesarias tres funciones que relacionen variables de tipo Adouble y variables de tipo SuperAdouble. Estas funciones son *push*, *popV* y *popD*. A continuación se presentan cada una de ellas y su relación con el cálculo de derivadas anidadas.

La función *push* recibe como parámetro una variable x de tipo Adouble y devuelve una variable X de tipo SuperAdouble. El campo valor de la variable X sería el Adouble x , y el campo derivada sería un Adouble con valor 1 y derivada 0.

Ejemplo 4. Si se tiene un Adouble $x = (4, 10)$, donde la primera componente del vector es el campo valor del Adouble, y la segunda, el campo derivada, entonces al aplicar *push* se obtiene un SuperAdouble X con los siguientes campos:

- $X.valor.valor = 4.$
- $X.valor.derivada = 10.$
- $X.derivada.valor = 1.$
- $X.derivada.derivada = 0.$

Por otra parte, las funciones *popV* y *popD* reciben como argumento un SuperAdouble y devuelven un Adouble. La función *popV* devuelve el campo valor del SuperAdouble y *popD* devuelve su campo derivada.

Ejemplo 5. Si se aplica la función *popV* al SuperAdouble X definido en el ejemplo anterior se obtiene un Adouble x con los siguientes campos:

- $x.valor = 4.$
- $x.derivada = 10.$

Por otra parte, si se aplica la función *popD* al mismo SuperAdouble X se obtiene:

- $x.valor = 1.$
- $x.derivada = 0.$

Para calcular derivadas anidadas, estas funciones deben usarse para modificar el código fuente de la función anidada como se muestra en la siguiente sección.

3.3. Modificación del código de la función anidada

En esta sección se presentan las modificaciones que son necesarias realizar en el código fuente de la función anidada para utilizar los SuperAdouble, las funciones *push*, *popD* y *popV* y obtener los valores de las derivadas anidadas.

Siguiendo con el Ejemplo 1,

$$f(x) = x^2 + \dot{g}(x^3), \quad g(x) = e^{x^2},$$

la Figura 3 muestra el código que permite calcular el valor de la función y su derivada en el punto $x = 3$ usando los SuperAdoubles y las funciones presentadas en la sección anterior.

```
class Example
{
    static void Main()
    {
        Adouble x = new Adouble();
        x.valor = 3;
        x.derivada = 1;
        Adouble w1 = x*x;           \\ w1 = x^2
        Adouble w2 = w1*x;          \\ w2 = x^3
        SuperAdouble Y1 = push(w2); \\ crear el SuperAdouble
        SuperAdouble Y2 = exp(Y1*Y1); \\ g(x) = exp(x^2)
        SuperAdouble W3 = exp(W2);
        Adouble w3 = popD(Y2);       \\ obtener la derivada anidada
        Adouble w4 = w1 + w3;        \\ w4 = x^2 + gdot(x^3)
        Console.WriteLine("El valor de f en x = 3 es: " +
                           w5.valor);
        Console.WriteLine("La derivada de f en x = 3 es: " +
                           w5.derivada);
    }
}
```

Figura 3: Aplicación de los SuperAdoubles en la AD.

En el código de la Figura 3 se empieza trabajando con números de tipo Adouble para calcular el valor y la derivada de las operaciones que no pertenezcan a la función anidada. La línea

```
SuperAdouble Y1 = push(w2);
```

crea un objeto SuperAdouble a partir de la variable anidada. Después de la creación de W1 se efectúan las operaciones de la función anidada utilizando SuperAdoubles. Con la línea

```
Adouble w3 = popD(Y2);
```

se obtiene un Adouble que en su campo valor tiene la derivada anidada, y en su campo derivada tiene la derivada compuesta. Finalmente, en la línea

```
Adouble w4 = w1 + w3;
```

se termina el cálculo de la función original.

Como todas las operaciones se han realizado con Adoubles, en el campo derivada del Adouble w4 se tiene la derivada de la función original, que era el objetivo que se perseguía.

4. Conclusiones

Con la metodología propuesta en este trabajo es posible utilizar la Diferenciación Automática para calcular derivadas anidadas. Esta metodología es sencilla de implementar gracias a que se puede reusar otras librerías de AD que soporten sobrecarga de operadores.

Como recomendaciones y trabajo futuro se propone implementar el modo hacia atrás de la Diferenciación Automática con los números de tipo SuperAdouble, lo cual sería útil en los casos que la función anidada con dominio en \mathbb{R}^n e imagen en \mathbb{R} , y generalizar los resultados obtenidos para el caso en que haya más de un nivel de anidación.

Referencias

- [1] David G. Luenberger. *Linear and nonlinear programming*, 1984. Addison-Wesley.
- [2] Hairer, Wanner. *Solving Ordinary Differential Equations. Vol II: Stiff and Differential Algebraic Problems*, 1991. Springer Verlag.
- [3] A. Griewank, A. Walther. *Evaluating Derivatives. Principles and Techniques of Algorithmic Differentiation*, 2008. SIAM.
- [4] Andrea Walther. *Getting Started with ADOL-C*, 2009.
- [5] Barak A. Pearlmutter, Jeffrey Mark Siskind. *Using Programming Language Theory to Make Automatic Differentiation Sound and Efficient*.
- [6] Manuel Alfredo Ferreiro. *ADOLNet, Herramienta para la Diferenciación Automática en .NET.*, 2010. Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana.
- [7] Jan Riehme, Andreas Griewank. *Algorithmic Differentiation Through Automatic Graph Elimination Ordering*, 2009.
- [8] Jeffrey Mark Siskind, Barak A. Pearlmutter. *Putting the Automatic Back into AD: Part I, What's Wrong*, 2008.
- [9] Andreas Griewank. *A mathematical view of automatic differentiation*, 2003. Cambridge University Press.

- [10] Harry H. Cheng. *Programming with Dual Numbers and its Applications in Mechanisms Desing*, 1994. Engineering with Computers, Vol. 10, No.4, pp. 212-229.
- [11] Juan Luis Valerdi. *Diferenciación Automática Anidada. Un enfoque algebraico*, 2012. MATCOM.
- [12] Sam A. Abolrous. *Learn C#*, 2008. Wordware Publishing.